RADICALES 3º ESO - APUNTES

1. POTENCIAS CON EXPONENTE FRACCIONARIO

Toda potencia con exponente fraccionario representa una raíz cuyo índice es el denominador del exponente y cuyo radicando es una potencia de la misma base que la potencia dada y cuyo exponente es el numerador del exponente:
Ejemplos:

$2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5}$ $\qquad$ $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9}$

$5^{\frac{7}{3}} = \sqrt[3]{5^7}$ $\qquad$ $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27}$

$3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3}$ $\qquad$ $625^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625}$

Se puede considerar la radicación como la operación inversa de la potenciación. Así: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

- $\sqrt{25} = 5 \Leftrightarrow 5^2 = 25$ $(\sqrt{5^2} = 5^{\frac{2}{2}} = 5)$
- $\sqrt[3]{27} = 3 \Leftrightarrow 3^3 = 27$ $(\sqrt[3]{3^3} = 3^{\frac{3}{3}} = 3)$
- $\sqrt[4]{625} = 5 \Leftrightarrow 5^4 = 625$ $(\sqrt[4]{5^4} = 5^{\frac{4}{4}} = 5)$

Una raíz de índice par y radicando positivo tendrá dos soluciones, una positiva y otra negativa:

- $\sqrt{9} = \pm 3$ ya que:

  $\rightarrow \sqrt{3^2} = 3^{\frac{2}{2}} = 3$

  $\rightarrow \sqrt{(-3)^2} = (-3)^{\frac{2}{2}} = -3$

Una raíz de índice par y radicando negativo no tiene solución en el conjunto R:
- $\sqrt{-25} = x \Leftrightarrow x^2 = -25$

(Esto es imposible, ya que ningún número real elevado al cuadrado puede ser negativo) $\rightarrow x \notin R$

Una raíz de índice impar tiene una única solución, positiva si el radicando es positivo y negativo si el radicando es negativo:

- $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2$
- $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = (-2)^{\frac{3}{3}} = -2$

A diferencia de las fracciones, cuando la raíz no es exacta, las cifras decimales no se repiten en periodos, aunque se saquen infinitas cifras, es decir, las raíces no exactas son números decimales ilimitados no periódicos (irracionales). Los irracionales junto con los racionales forman el conjunto de los números reales.

2. OPERACIONES CON RADICALES

2.1 PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LOS RADICALES

Si se multiplican o dividen el exponente del radicando y el índice de la raíz por un mismo número, el resultado de la raíz no varía:

$\sqrt[n]{a^p} =$

$\rightarrow \sqrt[n*m]{a^{p*m}}$ (amplificación)

$\rightarrow \sqrt[n/m]{a^{p/m}}$ (simplificación)

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4}$ (amplificación)
- $\sqrt[10]{a^8} = \sqrt[5]{a^4}$ (simplificación)

2.2 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE RADICALES

Para multiplicar o dividir radicales es necesario que sean homogéneos, es decir, que tengan el mismo índice:

$\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a*b}$

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Ejemplos:

$\sqrt[3]{5} * \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$

$\sqrt[5]{a} * \sqrt[5]{a^2} = \sqrt[5]{a^3}$

$\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{7}}$

$\dfrac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{a^2}} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{a}} = \sqrt[5]{a^{-1}}$

Si los radicales no son homogéneos hay que homogeneizarlos, para ello se aplica la propiedad fundamental de los radicales:

- $\sqrt[6]{a^5} * \sqrt[4]{ab^3} =$

1º paso: mcm de los índices: mcm(6, 4)=12. 12 será el índice común.
2º paso: buscar las raíces equivalentes a los anteriores con índice 12 (aplicar la propiedad fundamental de los radicales).

- $\sqrt[6]{a^5} = \sqrt[12]{a^{10}}$; $\sqrt[4]{ab^3} = \sqrt[12]{a^3b^9}$
- $\sqrt[6]{a^5} * \sqrt[4]{ab^3} = \sqrt[12]{a^{10}} * \sqrt[12]{a^3b^9} = \sqrt[12]{a^{13}b^9}$

2.3 EXTRACCIÓN DE FACTORES DE UN RADICAL

Cuando un factor que forma parte de un radicando tiene el exponente mayor o igual que el índice del radical, el factor se podrá sacar del radical, totalmente si además de mayor es múltiplo del índice y parcialmente si es mayor pero no múltiplo.
Ejemplos:

- $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3^{\frac{4}{4}} = 3$
- $\sqrt{81} = \sqrt{3^4} = 3^{\frac{4}{2}} = 3^2 = 9$

- $\sqrt[5]{a^5*b^{15}}=a^{\frac{5}{5}}*b^{\frac{15}{5}}=a*b^3$
- $\sqrt{1000}=\sqrt{10^3}=\sqrt{10^2}*\sqrt{10}=10^{\frac{2}{2}}*\sqrt{10}=10*\sqrt{10}$
- $\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3^4}=\sqrt[3]{3^3}*\sqrt[3]{3}=3^{\frac{3}{3}}*\sqrt[3]{3}=3*\sqrt[3]{3}$
- $\sqrt[5]{a^6*b^{17}}=\sqrt[5]{a^5*b^{15}}*\sqrt[5]{a*b^2}=a^{\frac{5}{5}}*b^{\frac{15}{5}}*\sqrt[5]{a*b^2}=a*b^3*\sqrt[5]{a*b^2}$

2.4 INTRODUCCIÓN DE FACTORES EN UN RADICAL

A veces interesa introducir un factor dentro del signo radical. Para ello se multiplica el exponente del factor por el índice del radical

- $10*\sqrt{10}=\sqrt{(10)^2*10}=\sqrt{10^3}$
- $3*\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3^3*3}=\sqrt[3]{3^4}$
- $a*b^3\sqrt[5]{a*b^2}=\sqrt[5]{(a*b^3)^5*a*b^2}=\sqrt[5]{a^5*b^{15}*a*b^2}=\sqrt[5]{a^6*b^{17}}$

2.5 POTENCIA DE UN RADICAL

$(\sqrt[p]{a})^n=\sqrt[p]{a^n}$

Ejemplos:

- $(\sqrt[3]{a})^4=\sqrt[3]{a^4}$

  $((\sqrt[3]{a})^4=\sqrt[3]{a}*\sqrt[3]{a}*\sqrt[3]{a}*\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a*a*a*a}=\sqrt[3]{a^4})$

- $(\sqrt[5]{2^2})^3=\sqrt[5]{2^6}$

  $((\sqrt[5]{2^2})^3=\sqrt[5]{2^2}*\sqrt[5]{2^2}*\sqrt[5]{2^2}=\sqrt[5]{2^2*2^2*2^2}=\sqrt[5]{2^6})$

2.6 RAÍZ DE UN RADICAL

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m*n]{a}$

Ejemplos:

- $\sqrt{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[6]{5}$

  $(\sqrt{\sqrt[3]{5}}=\sqrt{5^{\frac{1}{3}}}=(5^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{5})$

- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^2}}=\sqrt[15]{a^2}$

  $(\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^2}}=\sqrt[3]{a^{\frac{2}{5}}}=(a^{\frac{2}{5}})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{15}}=\sqrt[15]{a^2})$

2.7 ADICCIÓN Y SUSTRACCIÓN DE RADICALES

Para sumar y restar radicales tienen que ser semejantes, es decir, tienen que tener el mismo índice y el mismo radicando

- $5*\sqrt{3}-\sqrt{3}=(5-1)*\sqrt{3}=4*\sqrt{3}$
- $\sqrt{2}+6*\sqrt{2}-2*\sqrt{2}=(1+6-2)*\sqrt{2}=5*\sqrt{2}$
- $\sqrt{8}+2*\sqrt{18}=2*\sqrt{2}+6*\sqrt{2}=8*\sqrt{2}$

$$\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=\sqrt{2^2}*\sqrt{2}=2*\sqrt{2}\ ;\ \ \sqrt{18}=\sqrt{2*9}=\sqrt{3^2}*\sqrt{2}=3*\sqrt{2}$$